Ferdowsi University of Mashhad

Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics

Page Journal: mechanic-ferdowsi.um.ac.ir

Society of Manufacturing Engineering of Iran

Post-buckling Analysis of Hyperelastic Column under Axial Compressive Loading*

Research Article

Alireza Sedaghat[1], Javad Porkar[2]

10.22067/jacsm.2024.85357.1216

Abstract

This study investigates mixed convection heat transfer in laminar non-Newtonian flows within helical coil heat exchangers using nanofluids. The research examines nanoparticle volumetric concentrations ranging from 0% to 2% and power-law indices of 0.81, 0.85, and 0.91. The momentum and energy equations were solved using the finite volume method with the SIMPLE algorithm. We analyzed the effects of power-law index, Richardson number, helical coil pitch, and nanoparticle concentration on the Nusselt number. Results indicate that the heat transfer coefficient increases with nanoparticle concentration from 0% to 2%. The Nusselt number shows an inverse relationship with both the power-law index and friction coefficient. Additionally, increasing the coil pitch and nanoparticle concentration enhances the heat transfer coefficient, with a 7% increase in Nusselt number observed when the coil pitch varies from 0.05 to 0.1. Buoyancy forces significantly influence temperature distribution patterns and flow velocity in helical coils, leading to more uniform temperature distributions at higher buoyancy forces.

Keywords: Nano fluids, Non-Newtonian, heat exchangers helical coils, mix convection, Numerical study.

1- Introduction:

Column buckling, traditionally considered a failure mode, has recently emerged as a fundamental mechanism for designing mechanically functional metamaterials. This phenomenon enables tunable Poisson's ratios, programmable nonlinear responses, shape morphing, and multistability[1]. The buckling and post-buckling behavior of columns critically determines the performance of these metamaterials. Unlike simplified 1D joist models, our bifurcation analysis employs 2D continuum mechanics, incorporating both geometric and material nonlinearities, to accurately predict column behavior under axial compression [2].

Previous research has primarily focused on initial buckling behavior through incremental boundary value problem solutions. Koiter's asymptotic technique, widely applied to analyze post-buckling in various systems (including neo-Hookean materials, hyperelastic layers, and elastic tubes), serves as our methodological foundation. This study applies Koiter's approach to examine post-buckling in 2D rectangular blocks with diverse constitutive rules. Our findings reveal that uncut columns under controlled compression may exhibit unstable equilibrium paths characteristic of snapping-back buckling modes. While existing studies have explored some buckling behaviors, a comprehensive analysis of all possible buckling modes across different width-to-length ratios remains lacking. This work aims to address this research gap[3].

2- Buckling Mode Changes

We initiated our investigation with finite element analysis using ABAQUS to identify three distinct buckling modes in straight hyperelastic columns with varying width-to-length ratios under axial compression. The analysis employed the compressible neo-Hookean material model, with elastic energy density expressed as:

$$W = \frac{\mu}{2}\left[J^{-\frac{2}{3}}tr(FF^T) - 2\right] + \frac{K}{2}(J-1)^2$$

2D plane-stress simulations (CPE8H elements in ABAQUS) were performed for columns with width w and length L under axial displacement Δl using the static Riks method, and the compressive response force F was calculated. Figure 1 shows a schematic of the system, in which both ends of the column can move in the horizontal direction while remaining straight. Reflective symmetry was assumed for axis X_1, and thus only half of the column

*Manuscript received November 14, 2023. Revised July 14, 2024, Accepted October 29, 2024.

[1] Corresponding author, Assistance Professor, Department of Mechanical Engineering,La.C.,Islamic Azad University,Lahijan,Iran.

Email: Sedaghat.alirezaa@iau.ac.ir

[2] Ph.D. Student, Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University,Lahijan,Iran.

was simulated. Imperfections were introduced to the initial geometry to induce buckling and instability.

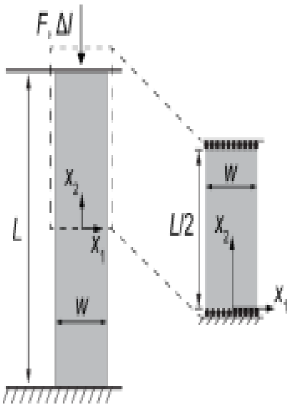


Fig. 1. Schematic of a 2D hyperelastic column under compressive force F or displacement Δ*l*

Figure 1 presents the numerical results, illustrating three distinct buckling modes of straight hyperelastic columns with varying width-to-length (w/L) ratios under axial compressive loading. The strain (ω) was defined as Δl/L, where Δl represents the displacement between the column's two ends. The normalized force-strain (F/wμ-ω) curves were plotted along the equilibrium paths (see Figure 2).

3. Continuum Mechanics-Based Asymptotic Analysis

This section presents a continuum mechanics-based asymptotic analysis to evaluate the buckling and post-buckling behavior of axially compressed columns. The analysis was extended to:

1. Determine the initial post-buckling slope.
2. Investigate the transition of buckling modes from continuous buckling to snapping-back buckling.

3.1. Stability Analysis of Post-Buckling Paths

This study examines the stability of post-buckling paths in axially compressed columns, with particular focus on:

- The initial post-buckling slope.
- The mode transition from continuous buckling to snapping-through buckling.

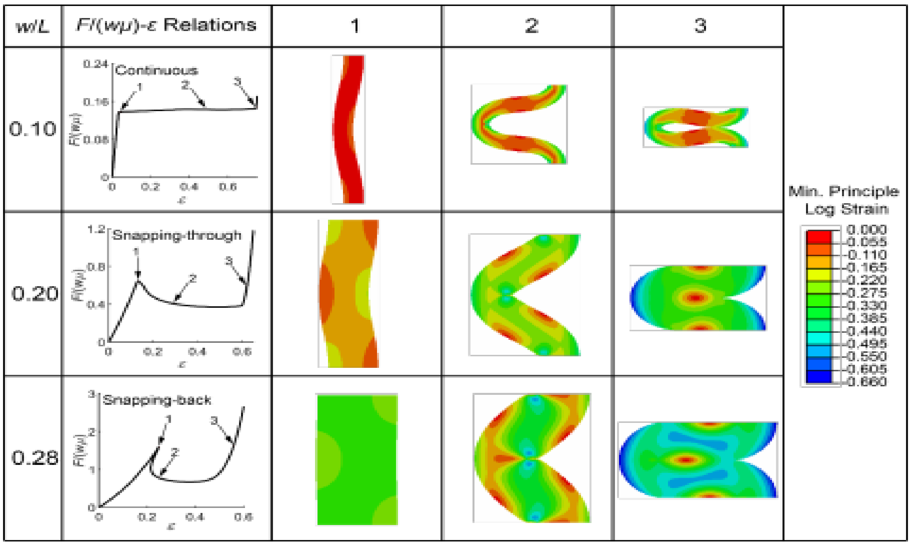


Fig. 2. (a) continuous buckling, (b) snapping-through buckling, and (c) snapping-back buckling (the shear modulus/bulk modulus was assumed to be 0 in the post-buckling analysis)

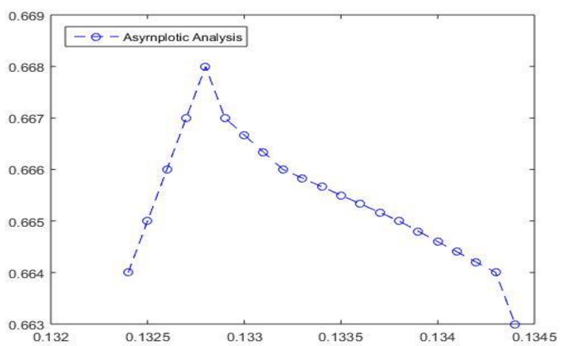


Fig. 3. Continuum mechanics-based asymptotic analysis

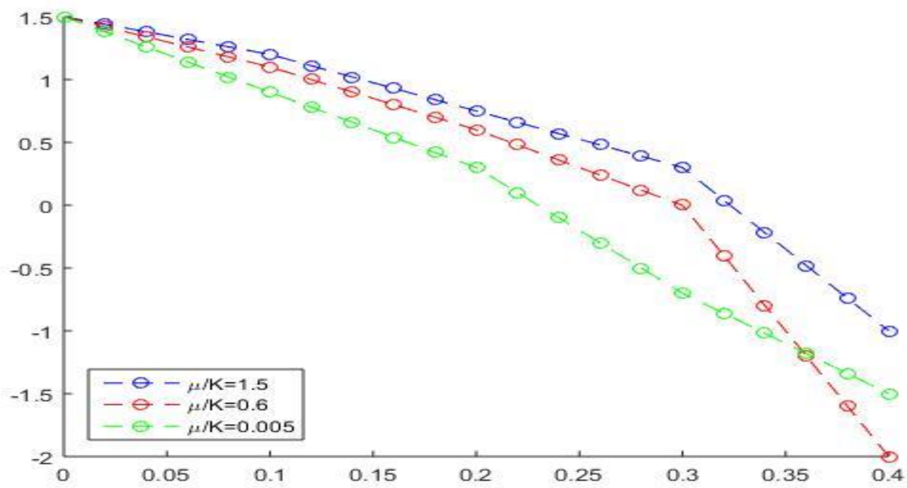


Fig. 4. Bifurcation analysis

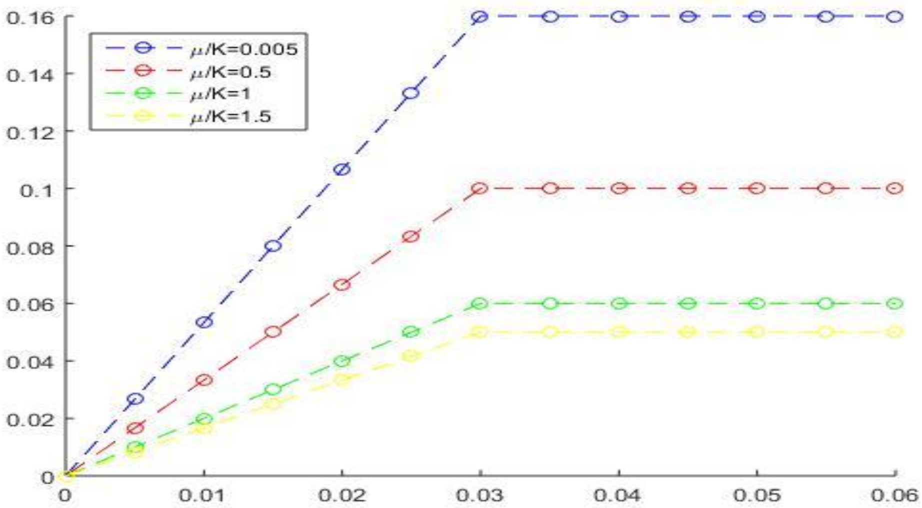


Fig. 5. Post-buckling analysis

3.2. Bifurcation analysis

Figure 4 represents the potential energy required for the in-plane deformation of the half-column.

3.3. Post-buckling analysis

Once the critical strain ω_{cr} for the onset of buckling and the corresponding mode u^1 had been found, the displacement field u and compressive strain were asymptotically extended near the buckling point in the buckling equilibrium direction of the column.

4. Conclusion

The buckling of straight columns under axial compressive loads has been studied extensively in recent decades. While the buckling behavior of slender columns has been effectively predicted, the post-buckling behavior of wide columns with high *w/L* ratios (where geometric and material nonlinearities are crucial) remains unexplored.

This paper analytically demonstrates that increasing the *w/L* ratio of a straight hyperelastic column changes its buckling mode from continuous buckling to snapping-through and then to snapping-back buckling. Consequently, the initial positive slope becomes negative and then positive again as the *w/L* ratio increases.

Using an asymptotic analysis based on continuum mechanics, the initial post-buckling slope can be expressed as a function of the *w/L* ratio, allowing determination of the critical *w/L* ratios for buckling mode transitions. These analytical results show good agreement with post-buckling behavior simulations.

Furthermore, an increase in the ratio of shear modulus to bulk modulus (representing material compressibility) raises the critical *w/L* ratio required for the transition from snapping-through to snapping-back buckling.

5- References

[1] K. Bertoldi, V. Vitelli, J. Christensen, M. Van Hecke, “Flexible mechanical metamaterials,” *Nature Reviews Materials*, vol. 2, no. 1, p. 17066, 2017. https://doi.org/10.1038/natrevmats.2017.66

[2] J.W. Boley, W.M. van Rees, C. Lissandrello, M.N. Horenstein, R.L. Truby, A. Kotikian, J.A. Lewis, L. Mahadevan, “Shape-shifting structured lattices via multimaterial 4D printing,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 116, no. 42, pp. 20856–20862, 2019. https://doi.org/10.1073/pnas.1908806116

[3] C. Coulais, A. Sabbadini, F. Vink, M. van Hecke, “Multi-step self-guided pathways for shape-changing metamaterials,” *Nature*, vol. 561, no. 7724, pp. 512–515, 2018. https://doi.org/10.1038/s41586-018-0541-0

[4] J. Kadkhodapour, A. Pourkamali Anaraki, “Investigating the Mechanical Properties of Polymer Composite Materials made by 3D Printing Method,” *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, vol. 35, no. 4, pp. 77–89, 2023. https://doi.org/10.22067/jacsm.2023.81972.1182

علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک

http://mechanic-ferdowsi.um.ac.ir

تحلیل پس کمانش برای ستون هایپرالاستیک تحت بارگذاری فشاری محوری*

مقاله پژوهشی

علیرضا صداقت (۱) جواد پرکار (۲)

10.22067/jacsm.2024.85357.1216

چکیده کمانش ستون‌های صاف تحت فشار محوری به طور گسترده برای چندین دهه مطالعه شده است. اگرچه رفتار کمانش ستون‌های لاغر به خوبی پیش‌بینی شده است ولی رفتار پس کمانش ستون‌های عریض با نسبت‌های عرض به طول بالا (که در آن‌ها غیرخطی هندسی و ماده حیاتی می‌شود) بررسی نشده است. در این مقاله، به صورت تحلیلی نشان داده شد که برای یک ستون هایپرالاستیک صاف، افزایش نسبت عرض به طول آن می‌تواند حالت کمانش آن را از کمانش پیوسته به فروجهشی و ارتجاعی تغییر دهد. بر همین اساس، علامت شیب اولیه پس کمانش نیز از مثبت به منفی تغییر می‌کند و در نهایت مجددا مثبت می‌شود. با استفاده از یک آنالیز مجانبی بر اساس مکانیک محیط‌های پیوسته می‌توان شیب اولیه پس کمانش را بر حسب تابعی از نسبت عرض به طول ستون تعیین کرد و سپس نسبت‌های عرض به طول بحرانی را برای تغییر حالت‌های کمانش مشخص کرد که این نتایج به خوبی با نتایج شبیه‌سازی نرم‌افزار تحلیل المان محدود مطابقت دارند. همچنین می‌توان دریافت کرد که با افزایش نسبت مدول برشی به حجمی که بیانگر تراکم‌پذیری ماده است، تغییر حالت کمانش از کمانش فروجهشی به ارتجاعی به یک نسبت عرض به طول بالاتر می‌رود. یک نمودار فازی حالت‌های کمانش بر حسب نسبت عرض به طول و نسبت مدول برشی به حجمی نیز رسم گردید. اگرچه آنالیز بر اساس یک ماده شبه هوکی خاص است ولی سایر مدل‌های شبه هوکی نیز نتایج مشابهی دارند. علاوه بر این، با افزایش نسبت مدول برشی به توده، که نشان دهنده تراکم‌پذیری مواد است، انتقال بین کمانش گیره‌دار و کمانش برگشتی به نسبت بحرانی عرض به طول بیشتر به تعویق می‌افتد. یک نمودار فاز از حالت‌های کمانش با توجه به نسبت عرض به طول و نسبت مدول برشی به حجم ساخته شده است که چارچوب پیشنهادی در این مقاله را می‌توان برای سایر قوانین ساختاری برای مطالعه اثرهای غیرخطی مواد مختلف بر رفتار پس کمانش اعمال کرد.

واژه‌های کلیدی پس کمانش، فرا مواد، هایپرالاستیک، آنالیز مجانبی.

مقدمه

کمانش ستون به عنوان نوعی گسیختگی (شکست) ماده در نظر گرفته می‌شود اما به تازگی از آن برای طراحی فرامواد کاربردی از لحاظ مکانیکی استفاده می‌شود [1] که در آن کمانش ستون مبنای بسیاری از ویژگی‌های مهم مانند نسبت پواسون قابل تنظیم [2]، پاسخ‌های غیرخطی قابل برنامه‌ریزی [3]، دگردیسی یا مورفینگ (morphing) شکل [4] و پایداری چندگانه [5] است. کمانش و پس کمانش ستون‌ها به شدت روی رفتار این فرامواد تأثیرگذار است.

منحنی زنجیره‌ای اویلر (Euler's elastica) ساده‌ترین تعریف برای کمانش ستون است که در آن ستون‌ها به صورت میله‌های الاستیک خطی مدلسازی شده‌اند که دچار تغییر شکل‌های کوچک می‌شوند. این مدل پیش‌بینی می‌کند که یک ستون صاف که در معرض یک نیروی فشاری F یا برش ε است در یک شرایط بحرانی Fcr یا εcr دچار کمانش می‌شود و شیب پس کمانش S تعریف می‌شود که در معادله $(F-F_{cr})/F_{cr} = S(\varepsilon-\varepsilon_{cr})$ یک مقدار

* تاریخ دریافت مقاله ۱۴۰۲/۸/۲۳ و تاریخ پذیرش آن ۱۴۰۳/۸/۸ می باشد.

(۱) نویسنده مسئول: استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران. **Email**: Sedaghat.alirezaa@iau.ac.ir

(۲) دانشجو دکتری، گروه مهندسی مکانیک، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران.

ثابت و مثبت (۲/۱) دارد که مستقل از شرایط مرزی و هندسی است [8]. این معادله به خوبی رفتار کمانش ستون‌های لاغر را پیش‌بینی می‌کند اما با پهن‌تر شدن ستون، رفتار پس کمانشی آن‌ها به شدت تغییر می‌کند چون که کرنش حیاتی برای کمانش ستون زیاد می‌شود، که در نتیجه رفتار غیرخطی هندسی ماده نقش کلیدی در ناحیه پس کمانش ایفا می‌کند. با افزایش نسبت عرض به طول، حالت کمانش یک ستون هایپرالاستیک صاف تحت فشار محوری از کمانش پیوسته فروجهشی به ارتجاعی تبدیل می‌شود. بر همین اساس، شیب پس کمانش اولیه از مثبت به منفی تغییر می‌کند و در نهایت دوباره مثبت خواهد شد. برای پیش‌بینی رفتار خمش و کمانش ستون‌های عریض، چندین مدل تیرچه پیشنهاد شده است تا منحنی زنجیره‌ای اویلر را توسعه دهند [6] اما هیچ کدام از مدل‌های تیرچه تک‌بعدی نمی‌توانند تغییر حالت‌های کمانش فروجهشی و ارتجاعی بر حسب نسبت عرض به طول را نشان دهند. مدل‌های تیرچه ارائه شده در مقالات، تغییرشکل‌های محوری و برشی را در نظر می‌گیرند ولی ماده سازنده را خطی فرض می‌کنند که این مدل‌ها می‌توانند پیش‌بینی کنند با افزایش نسبت عرض به طول، شیب اولیه منحنی پس کمانش از ۲/۱ کاهش می‌یابد ولی همچنان مثبت باقی می‌ماند. به تازگی برخی محققان [6] تلاش کرده‌اند غیر خطی بودن ماده را در این مدل‌ها جا دهند که در عین حال تیرچه به صورت قابل برش و بسط‌پذیر باشد. مدل پیشنهادی می‌تواند تغییرات شیب منحنی پس کمانش از مثبت به منفی را با افزایش نسبت عرض به طول نشان دهد ولی اگر این نسبت بیش از حد زیاد شود آن‌گاه علامت شیب را به مثبت برنمی‌گرداند. علت این موضوع کرنش مرتبه بالا به دلیل غیر خطی بودن است که در ناحیه پس کمانش ستون‌های عریض ناچیز نیست. همچنین فرض سینماتیکی [7] استفاده شده در این مدل‌ها (یعنی سطح مقطع تیرها به صورت غیرپیچشی در وضعیت تغییر شکل یافته باقی می‌ماند) برای ستون‌های عریض معتبر نیست.

در مقایسه با مدل‌های تیرچه تک‌بعدی، یک آنالیز دوشاخه‌شدگی (Bifurcation analysis) بر اساس مکانیک محیط‌های پیوسته و دوبعدی (که غیرخطی بودن هندسی و ماده را در نظر می‌گیرد) می‌تواند رفتار کمانش و پس کمانش ستون‌های تحت فشار محوری را با دقت پیش‌بینی کند. شروع رفتار کمانش ستون‌های تحت فشار محوری در مقالات مختلف با حل کردن یک مسئله مقدار مرزی افزایشی بررسی شده است [8,9]. برای تعیین مسیرهای تعادل رفتار پس کمانش و پایداری آن‌ها، یک روش مجانبی توسط کویتر [10] معرفی شد که به طور گسترده برای یافتن جواب‌های مسئله پس کمانش یک نیم فضای تحت فشار از ماده شبه هوکی [11]، یک لایه هایپرالاستیک و نازک تحت فشار [12]، یک لوله هایپرالاستیک تحت فشار محوری [13] و یک میله الاستیک چسبیده به یک فونداسیون الاستیک [14] استفاده می‌شود. در این مقاله [15] از این روش برای بررسی رفتار پس کمانش یک بلوک مستطیلی شکل و دوبعدی با قوانین ساختاری مختلف استفاده شده است که در نهایت معلوم شد یک ستون نتراشیده که تحت فشار کنترل شده است می‌تواند یک مسیر تعادل ناپایدار داشته باشد که مربوط به حالت کمانش ارتجاعی است. اما تمامی حالت‌های کمانش برای ستون‌های تحت فشار محوری بر حسب نسبت عرض به طول به صورت تحلیلی بررسی نشده‌اند که دلیل اصلی برای انجام این پژوهش است.

برای اندازه‌گیری برگشت فنری، پس از اتمام تغییر شکل، مختصات دو نقطه انتهایی قطعات و فاصله آن‌ها نسبت به یکدیگر اندازه‌گیری می‌شود و بعد از باربرداری از قطعه و اعمال برگشت فنری روی قطعه، مختصات همان دو نقطه دوباره استخراج و اندازه‌گیری می‌شود [16,17].

برای بررسی تنش‌ها در ضخامت ورق نیاز است که تنش‌ها دسته‌بندی و تفکیک شده و مقادیر آن‌ها مقایسه گردد. برای این منظور از ابزار خطی‌سازی تنش در آباکوس استفاده شده است [18].

در این مقاله مقصود این است که مسئله شیب اولیه منحنی پس کمانش یک ستون هایپرالاستیک و صاف که تحت فشار محوری است با استفاده از یک آنالیز پس کمانش مجانبی (asymptotic post-buckling analysis) در چارچوب الاستیسیته تغییر شکل‌های بزرگ حل شود و تغییر حالت‌های کمانش از کمانش پیوسته، فروجهشی تا ارتجاعی بر حسب نسبت عرض به طول ستون مورد بررسی قرار گیرد. نتایج توسط تحلیل المان محدود تأیید خواهند شد. در بخش (۲) یافته‌های عددی و پیشین بسط داده می‌شوند تا ثابت کنند که یک ستون هایپرالاستیک دوبعدی و تحت فشار محوری می‌تواند سه حالت کمانش ذکر شده را با تغییر نسبت عرض به طول خود نشان دهد. در بخش

(۳) یک آنالیز مجانبی بر اساس مکانیک محیط‌های پیوسته انجام داده شد که شامل غیر خطی‌های هندسی و ماده در مدل مورد نظر است تا شیب پس کمانش اولیه بر حسب تابعی از نسبت عرض به طول تعیین شود. علاوه بر این، نسبت‌های بحرانی عرض به طول برای تغییر حالت‌های کمانش تعیین شد و تأثیر تراکم‌پذیری ماده روی این مقادیر بحرانی بررسی گردید. پیش‌بینی‌های پاسخ پس کمانش مطابقت خوبی با شبیه‌سازی به کمک روش المان محدود دارد.

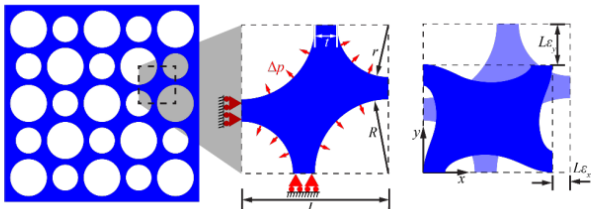
تغییر حالت‌های کمانش

ابتدا تحلیل المان محدود با استفاده از نرم‌افزار تجاری آباکوس انجام داده شد تا سه حالت کمانش یک ستون هایپرالاستیک و صاف تحت فشار محوری با تغییر نسبت عرض به طول آن تعیین گردد. رابطه بنیادی استفاده شده در تحلیل المان محدود همان قانون ماده شبه هوکی تراکم‌پذیر با معادله چگالی انرژی الاستیک زیر است:

$$W = \frac{\mu}{2}\left[J^{-2/3}\mathrm{tr}(FF^{T}) - 2\right] + \frac{K}{2}(J-1)^{2} \qquad (۱)$$

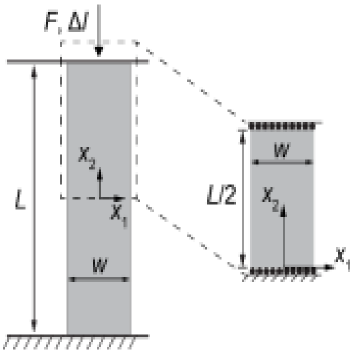
که در آن F گرادیان تغییر شکل $F_{ij} = \partial u_i/(\partial X_j + \delta_{ij})$، u_i بیانگر تغییر مکان در جهت X_i و δ_{ij} بیانگر دلتای کرونکر است)، J دترمینان F، μ و K به ترتیب مدول برشی و حجمی هستند. با داشتن ضریب $J^{-2/3}$، عبارت اول در انرژی کرنشی W در معادله فوق مربوط به تغییر شکل انحرافی است در حالی که عبارت دوم مربوط به تغییر شکل حجمی است. هرگاه K به بی‌نهایت نزدیک شود، مدل فوق بیانگر یک ماده شبه هوکی تراکم‌ناپذیر است که در شبیه‌سازی‌های شکل (۳) برای بیان یک ماده هایپرالاستیک عمومی استفاده شده است.

شبیه‌سازی‌های کرنش صفحه‌ای دوبعدی (المان از نوع CPE8H در برنامه آباکوس) برای ستون‌هایی با عرض w و طول L تحت یک جابه‌جایی محوری Δl با استفاده از روش استاتیک ریکس انجام شد و نیروی عکس‌العمل تراکمی F محاسبه گردید. در شکل (۲) هر دو قسمت انتهایی ستون‌ها می‌توانند آزادانه در امتداد جهت افقی بلغزند ولی به صورت صاف باقی بمانند. تقارن بازتاب برای محور X_1 فرض شد که به همین دلیل فقط نیمی از این ستون شبیه‌سازی می‌شوند. نقص‌ها و عیب‌هایی به هندسه اولیه وارد می‌شوند تا منجر به کمانش و ناپایداری شوند.



(الف) (ب) (ج)

شکل ۱ راه اندازی شبیه‌سازی المان محدود: الف) شماتیک یک دال الاستومری که از مجموعه‌ای از سوراخ‌ها تشکیل شده است، ب) سلول واحد مورد استفاده برای شبیه‌سازی اجزای محدود. سلول واحد در اینجا به عنوان کوچک‌ترین واحد هندسی شناخته می‌شود که می‌تواند کل سیستم را با آینه‌سازی و الگوسازی خود بسازد. این سلول واحد توسط شرایط مرزی متقارن محدود می‌شود و تحت فشار Δp قرار می‌گیرد، که به عنوان اختلاف بین فشار خارجی فشار خارجی و پینت فشار داخلی (Δp = pext - pint) تعریف می‌شود و ج) تغییر شکل این سلول واحد با تغییرات طول شبکه در جهت x و y بین حالت تغییر شکل نیافته (آبی روشن) و حالت تغییر شکل (آبی تیره) اندازه‌گیری می‌شود.



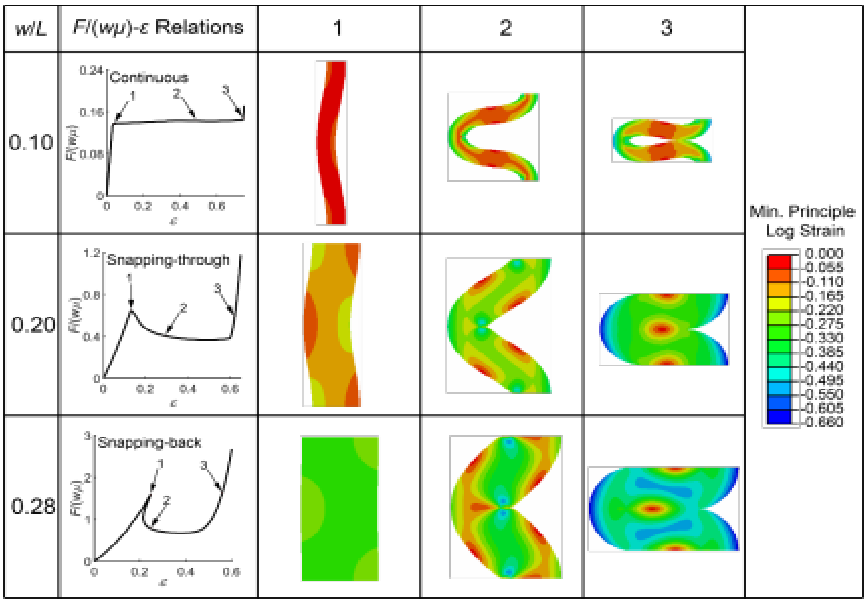
شکل ۲ شماتیکی از یک ستون هایپرالاستیک و دوبعدی (سمت چپ) قرار گرفته در معرض یک نیروی تراکمی F یا یک جابه‌جایی Δl. به دلیل تقارن، فقط نیمه بالایی این ستون (سمت راست) برای شبیه‌سازی و مدل‌سازی انتخاب شده است.

نتایج عددی در شکل (۳) به طور خلاصه بیان شده است تا نشان دهد که سه حالت کمانش برای ستون‌های هایپرالاستیک صاف با نسبت‌های عرض به طول (w/L) متفاوت بوده و تحت فشار محوری قرار دارد. کرنش ε به صورت Δl/L تعریف شد و جابه‌جایی Δl بین دو انتهای ستون تقسیم بر طول اولیه آن L است. سپس منحنی‌های نرمال شده نیرو ـ کرنش F/wμ-ε در امتداد مسیرهای تعادل رسم گردید (ستون دوم در شکل (۳) و

شکل‌های تغییر یافته در سه موقعیت خاص روی این منحنی‌ها نشان داده شد:

۱) شروع کمانش ستون (نقطه ۱، ستون سوم در شکل ۳)، ۲) شروع چروک‌شدگی (Creasing) [19,20–21] (که یک تاشدگی بدون مقیاس است) روی قسمت متراکم ستون (نقطه ۲، ستون چهارم در شکل ۳) و ۳) برگشتن نیروهای عکس‌العمل (نقطه ۳، ستون پنجم در شکل ۳). هرگاه w/L کم باشد (w/L=0. 1، ردیف دوم از شکل ۳)، هر چند شیب منحنی F/wμ-ε به شدت پس از کمانش کاهش می‌یابد ولی همچنان مثبت باقی می‌ماند. این حالت کمانش را کمانش پیوسته می‌نامند چون که رفتار پس کمانش پایدار است و نیرو و کرنش به صورت پیوسته زیاد می‌شوند. با افزایش w/L، رفتار کمانش ناپیوسته می‌شود. (w/L=0.1، ردیف دوم از شکل ۳)، نیرو کاهش می‌یابد در حالی که کرنش پس از نقطه کمانش (نقطه ۱) زیاد می‌شود و منجر به یک شیب پس کمانش منفی می‌شود که در نهایت به دلیل خود تماسی به شدت زیاد می‌شود. این حالت کمانش با یک شیب پس کمانش منفی اصطلاحا کمانش فروجهشی نامیده می‌شود که معمولا در کمان یا طاق‌های کم‌عمق دیده می‌شود [22]. هرگاه w/L=0.2 باشد (ردیف چهارم در شکل ۳)، نیرو و کرنش پس از نقطه کمانش (نقطه ۱) کاهش می‌یابند و یک شیب پس کمانش مثبت را به وجود می‌آورند. این حالت کمانش با چنین رابطه نیرو ـ کرنشی همانند کمانش پوسته (shell buckling) است [23] و کمانش ارتجاعی نامیده می‌شود. در مجموع، با افزایش w/L حالت کمانش از یک کمانش پیوسته به کمانش فروجهشی و در نهایت به کمانش ارتجاعی تغییر می‌یابد. بر همین اساس، شیب پس کمانش اولیه از یک مقدار مثبت به منفی تغییر می‌کند و در نهایت دوباره مثبت می‌شود. ایجاد یک ساختار مرکب به منظور دستیابی به خواص مکانیکی متفاوت از مواد تشکیل دهنده آن به صورت مجزا است [24]، که این تفاوت در خواص مکانیکی شامل تغییر در استحکام کششی و مدول الاستیسیته و کرنش می‌باشد [25]

نتایج عددی پیشین نشان دادند که مقدار w/L بحرانی برای تغییر حالت کمانش از کمانش فروجهشی به کمانش ارتجاعی برای یک ماده شبه هوکی تراکم‌ناپذیر حدود ۰/۲۴ است که در هیچ کدام از مدل‌های تیرچه موجود [6,7] پیش‌بینی نشده است.



شکل ۳ سه حالت کمانش ستون تحت فشار محوری: کمانش پیوسته (ردیف دوم)، فروجهشی (ردیف سوم) و ارتجاعی (ردیف چهارم). روابط بین نیروی تراکمی نرمال شده (F/wμ) و کرنش (ε) در ستون دوم رسم شده‌اند. ستون‌های سوم تا پنجم نشان می‌دهند چگونه شکل ستون‌ها با افزایش کرنش تراکمی تغییر می‌کند. رنگ‌ها نشان دهنده سطح کرنش لگاریتمی مینیمم هستند. نسبت مدول برشی به حجمی μ/K استفاده شده در آنالیز پس کمانش برابر با صفر است.

تحلیل مجانبی مبتنی بر مکانیک پیوسته

در این بخش، یک تحلیل مجانبی مبتنی بر مکانیک پیوسته برای بررسی رفتار کمانش و پس کمانش ستون‌های فشرده شده محوری انجام داده شد. در اینجا تجزیه و تحلیل برای تعیین شیب اولیه پس کمانش گسترش داده شد و انتقال حالت‌های کمانش از پیوسته به بازگشت به عقب مورد بررسی قرار گرفت.

آنالیز مجانبی بر اساس مکانیک محیط‌های پیوسته

در این بخش یک آنالیز مجانبی بر اساس مکانیک محیط‌های پیوسته انجام داده شد [15-26] تا رفتار کمانشی و پس کمانشی ستون‌های تحت فشار محوری مورد بررسی قرار گیرد. در این مقاله [27]، پایداری مسیرهای پس کمانش ستون‌های تحت فشار محوری مطالعه شده است که در اینجا این آنالیز بسط داده شده تا شیب پس کمانش اولیه تعیین گردد و تبدیل حالت‌های کمانش از کمانش پیوسته به فروجهشی مورد بررسی قرار گیرد.

آنالیز دوشاخه‌شدگی

انرژی پتانسیل مورد نیاز برای تغییر شکل صفحه‌ای نیم ستون نشان داده شده در شکل (۲) عبارت است از:

$$\Pi[u;\varepsilon]=\int_A W dA=\int_0^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}}\Big\{\frac{\mu}{2}[J^{-23}tr(FF^T)-2]+\frac{K}{2}(J-1)^2\Big\}dX_1dX2_2 \quad (۲)$$

که در آن u بیانگر میدان جابه‌جایی، W تابع چگالی انرژی الاستیک است که از معادله (۱) به دست می‌آید. معادله وردشی (variational equation) تعادل را می‌توان با اعمال اصل انرژی پتانسیل ساکن به دست آورد که به صورت زیر است:

$$\Pi'[u;\varepsilon]\delta u=0 \quad u^0 \quad (۳)$$

که در آن Π' مشتق مرتبه اول Π نسبت به u است.

یک جواب پایه (اصلی) برای معادله (۳) وجود دارد که به صورت u^0 نشان داده می‌شود. این جواب مربوط به تغییر شکل همگن است و می‌توان آن را بر حسب کشیدگی‌های اصلی به صورت زیر نوشت:

$$\overset{0}{u}=\begin{bmatrix}\overset{0}{u_1}\\ \overset{0}{u_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\lambda_1-1)X_1\\(\lambda_2-1)X_2\end{bmatrix} \quad (۴)$$

که در آن λ_1 و λ_2 دو کشش اصلی در جهت‌های X_1 و X_2 هستند و از معادله زیر به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial W}{\lambda 1_1}=0 \qquad \lambda_2=1-\varepsilon. \quad (۵)$$

معادله اول در معادله (۵) نشان می‌دهد که تنش پیولا ـ کیرشهف (Piola-Kirchhoff) اول در جهت X_1 ناپدید می‌شود.

جواب پایه u^0 در معادله (۴) تا زمانی برقرار است که ε به ε_{cr} برسد چون پس از آن جواب دیگری برای معادله (۳) برای کمانش ستون به دست می‌آید. کرنش بحرانی ε_{cr} برای کمانش ستون را می‌توان به صورت تحلیلی و با حل مسئله مشخصه زیر تعیین کرد [10-15]:

$$\Pi''[u^0(\varepsilon_{cr});\varepsilon_{cr}]u^1\delta u=0 \quad (۶)$$

برای تمامی میدان‌های جابه‌جایی مجاز δu که Π'' مشتق دوم Π بر حسب u است، $\overset{0}{u}(\varepsilon_{cr})$ جواب اصلی در ε_{cr} و u^1 حالت کمانش است.

با جای‌گذاری معادله (۲) در معادله (۶):

$$\Pi''[u^0(\varepsilon_{cr});\varepsilon_{cr}]u^1\delta u=\int_0^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}}\frac{\partial^2W[U^0(\varepsilon_{cr})]}{\partial U_{K,l}\,\partial u_{i,j}}u^1_{i,j}\delta u_{k,l}dx_1dx_2=0 \quad (۷)$$

که در آن u_i و $\overset{1}{u}_i$ به ترتیب مؤلفه‌های u و u^1 در جهت X_i هستند و $()_{,j}=\partial()/\partial X_j$ است. انتگرال‌گیری جزء به جزء به ما معادلات دیفرانسیلی اویلر ـ لاگرانژ را برای u^1 می‌دهد که به صورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 w[u^0(\varepsilon_{cr})]}{\partial u_{kl}\,\partial u_{ij}}u^1_{ijl}=0 \quad (۸)$$

و شرایط مرزی متناظر با آن عبارتند از:

$$\frac{\partial^2 w[u^0(\varepsilon_{cr})]}{\partial u_{kl}\partial u_{ij}}u^1_{ij}=0\ at X_1=\pm\frac{w}{2} \quad (۹)$$

$$\delta u_2=0 \text{ and } \frac{\partial^2 w[u^0(\varepsilon_{cr})]}{\partial u_{12}\,\partial u_{ij}}u^1_{ij}=0 \text{ at } X_2=0 \text{ and } L/2 \quad (۱۰)$$

که $()_{,jl}=\partial^2()/\partial X_j\,\partial X_l$ است. جواب‌های معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\{u_1^1 = \left(\alpha_1 \cosh z_1 X_1 + \alpha_2 \cosh z_2 X_1\right) \cos\frac{2\pi X_2}{L} \quad u_2^1 = \left(\alpha_3 \sinh z_1 X_1 + \alpha_4 \sinh z_2 X_1\right) \sin\frac{2\pi X_2}{L}$$ (۱۱)

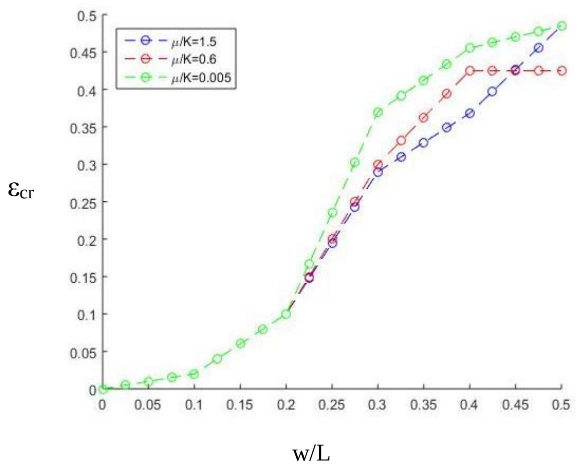
که در آن z_1 و z_2 دو ریشه مثبت چندجمله‌ای مشخصه معادله (۸) هستند. با جای‌گذاری معادله (۱۱) در معادلات (۸) و (۹):

$$A[a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ ] = 0.$$ (۱۲)

یک جواب غیربدیهی (مخالف صفر) برای معادله (۱۲) زمانی وجود دارد که دترمینان ماتریس ضریب A از بین برود که به کمک آن می‌توان ε_{cr} را حل کرد. به کمک معادله (۱۲) و معادله زیر می‌توان ضرایب $\alpha_1 \sim \alpha_2$ را به دست آورد که منجر به حالت کمانش u^1 با نوسان واحد می‌شود.

$$\langle \frac{1}{u}\frac{1}{u} \rangle = \frac{2}{LW}\int_0^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}} \frac{1}{u_i}\frac{1}{u_i} dx_1 dx_2 = 1$$ (۱۳)

کرنش بحرانی برای شروع کمانش ستون ε_{cr} به نسبت مدول برشی به حجمی μ/K و نسبت عرض به طول w/L بستگی دارد. شکل (۳) مقادیر ε_{cr} برای کمانش ستون را بر حسب تابعی از w/L و سه نسبت μ/K متفاوت نشان می‌دهد. به ازای یک μ/K مشخص و با افزایش نسبت w/L، کرنش بحرانی ε_{cr} به صورت یکنواخت از صفر افزایش می‌یابد. اما وابستگی ε_{cr} به μ/K یکنواخت نیست. برای ستون‌های ضخیم یعنی ستون‌های با w/L>۰٫۳۵، حالت دارای یک μ/K متوسط (منحنی قرمز رنگ در شکل ۳) پایین‌ترین مقدار ε_{cr} را دارد. زمانی که کرنش بحرانی برای شروع کمانش از چروک‌شدگی برای یک w/L بالا بیشتر شود آن‌گاه چروک‌شدگی قبل از کمانش و در یک کرنش بحرانی ثابت (خطوط نقطه‌چین افقی) رخ می‌دهد [28]. کرنش بحرانی برای شروع چروک‌شدگی تحت شرایط کرنش صفحه‌ای برای یک ماده شبه هوکی تراکم‌ناپذیر (۰ =μ/K) برابر با ۰/۳۵۴ است و با افزایش μ/K نیز به صورت غیر یکنواخت تغییر می‌کند [24]. فصل مشترک بین شرایط بحرانی کمانش و چروک‌شدگی نیز w/L بحرانی را تعیین می‌کند که در مقادیر کمتر از آن، ابتدا کمانش رخ می‌دهد و به ازای مقادیر بیشتر از آن نیز ابتدا چروک‌شدگی رخ می‌دهد.



شکل ۴ کرنش بحرانی ε_{cr} برای شروع ناپایداری ستون بر حسب تابعی از نسبت عرض به طول w/L و به ازای نسبت‌های مختلف مدول برشی به حجمی μ/K. منحنی‌ها بیانگر کرنش بحرانی برای کمانش ستون هستند در حالی که خطوط نقطه‌چین افقی نشان دهنده کرنش بحرانی برای چروک‌شدگی در یک دال فشرده شده به صورت همگن هستند. این خطوط در یک w/L بحرانی با هم برخورد می‌کنند که در مقادیر کمتر از آن ابتدا کمانش رخ می‌دهد و در مقادیر بیشتر از آن نیز ابتدا چروک‌شدگی رخ می‌دهد.

آنالیز پس کمانش

با تعیین کرنش بحرانی ε_{cr} برای شروع کمانش و حالت ویژه متناظر با آن u^1، میدان جابه‌جایی u و کرنش فشاری ε را به صورت مجانب‌وار در نزدیکی نقطه کمانش و در امتداد مسیر تعادل کمانش ستون بسط داده شد و معادلات زیر به دست آمد:

$$u = u^0(\varepsilon) + \xi u^1 + \xi^2 u^2 + o(\xi^3)$$ (۱۴)

$$\varepsilon = \varepsilon_{cr} + \xi^2 \varepsilon_2 + o(\xi^4)$$ (۱۵)

که در آن ξ دامنه حالت کمانش u^1 است. به دلیل تقارن، فقط عبارت‌های توانی فرد ξ در معادله (۱۵) وجود دارند به نحوی که علامت ξ هیچ تأثیری روی ε ندارد. از آنجایی که u و ε که از معادلات (۱۴) و (۱۵) به دست می‌آیند باید معادله $\prod{}'[u;\varepsilon]\delta u = 0$ را راضی کنند بنابراین یک بسط سری تیلور حول نقطه کمانش به ما عبارت زیر را خواهد داد:

$$\left(\Pi''_{cr}\,{}^{2}_{u} + \frac{1}{2}\Pi'''_{cr}\,{}^{1}_{u}2\right)\delta u \xi^2 + \left(\varepsilon_2 \dot{\Pi}''_{cr}\,{}^{1}_{u} + \quad \Pi'''_{cr}\,{}^{1}_{u}\,{}^{2}_{u} + \frac{1}{6}\Pi^{iv}_{cr}\,{}^{1}_{u}3\right)\delta u \xi^3 + 0(\xi^4) = 0$$ (۱۶)

که در آن $\Pi_{cr}^{(n)}$ مشتق nام Π در نقطه کمانش یعنی $\Pi^{(n)}[\overset{0}{u}(\varepsilon_{cr});\varepsilon_{cr}]$ است و مشتق اول بر حسب ε است. ضرایب ξ^2 و ξ^3 در معادله باید به صورت جداگانه ناپدید شوند که یک معادله وردشی را برای u^2 به دنبال خواهد داشت:

$$\Pi''_{cr}\overset{2}{u}\delta u + \frac{1}{2}\Pi'''_{cr}\overset{1}{u^2}\delta u = 0 \qquad (۱۷)$$

و عبارت زیر با قرار دادن $\delta u = \overset{1}{u}$ برای ε_2 به دست می‌آید:

$$\varepsilon_2 = -\frac{\Pi'''_{cr}\overset{1}{u^2}+\frac{1}{6}\Pi^{(iv)}_{cr}\overset{1}{u^4}}{\Pi''_{cr}\overset{1}{u^2}} \qquad (۱۸)$$

با جای‌گذاری معادله (۲) در معادله (۱۷) داریم:

$$\int_0^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}}\left[\frac{\partial^2 w\left[\overset{0}{u}(\varepsilon_{cr})\right]}{\partial u_{i,j}\,\partial u_{k,l}}\right]\overset{2}{u}_{k,l} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^3 w\left[\overset{0}{u}(\varepsilon_{cr})\right]}{\partial u_{i,j}\,\partial u_{m,n}\,\partial u_{k,l}}\overset{1}{u}_{k,l}\overset{1}{u}_{m,n}\right]\delta u_{i,j}dX_1dX_2 = 0 \qquad (۱۹)$$

انتگرال‌گیری جزء به جزء از این معادله نیز معادله دیفرانسیل اویلر ـ لاگرانژ زیر را برای u^2 خواهد داشت:

$$\frac{\partial^2 w\left[\overset{0}{u}(\varepsilon_{cr})\right]}{\partial u_{i,j}\,\partial u_{k,l}}\overset{2}{u}_{k,lj} + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 w\left[\overset{0}{u}(\varepsilon_{cr})\right]}{\partial u_{i,j}\,\partial u_{m,n}\,\partial u_{k,l}}\left(\overset{1}{u}_{k,lj}\overset{1}{u}_{m,n}+\overset{1}{u}_{k,l}\overset{1}{u}_{m,nj}\right) = 0 \qquad (۲۰)$$

و شرایط مرزی متناظر با آن عبارتند از:

$$\frac{\partial^2 w\left[\overset{0}{u}(\varepsilon_{cr})\right]}{\partial u_{i,j}\,\partial u_{k,l}}\overset{2}{u}_{k,l} + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 w\left[\overset{0}{u}(\varepsilon_{cr})\right]}{\partial u_{i,l}\,\partial u_{m,n}\,\partial u_{k,l}}\overset{1}{u}_{k,l}\overset{1}{u}_{m,n} = 0 \text{ at } X_1 = \pm\frac{w}{2} \qquad (۲۱)$$

$$\delta u_2 = 0 \text{ and } \frac{\partial^2 w\left[\overset{0}{u}(\varepsilon_{cr})\right]}{\partial u_{1,2}\,\partial u_{k,l}}\overset{2}{u}_{k,l} + \frac{1}{2}\frac{\partial^3 w\left[\overset{0}{u}(\varepsilon_{cr})\right]}{\partial u_{1,2}\,\partial u_{m,n}\,\partial u_{k,l}}\overset{1}{u}_{k,l}\overset{1}{u}_{m,n} = 0 \text{ at } X_2 = 0 \text{ and } L/2 \qquad (۲۲)$$

معادله (۲۲) به صورت خودکار برقرار است. به دلیل تعامد بین u^1 و u^2 داریم:

$$\langle\overset{1}{u}\overset{2}{u}\rangle = \frac{2}{LW}\int_0^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}}\overset{1}{u}_i\overset{2}{u}_i\,dx_1dx_2 = 0 \qquad (۲۳)$$

جواب‌های معادله (۲۰) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\left\{\overset{2}{u}_1 = B_1(X_1)\cos\frac{4\pi X_2}{L} + C_1(X_1)\ \overset{2}{u}_2 = B_2(X_1)\sin\frac{4\pi X_2}{L}\right. \qquad (۲۴)$$

با جای‌گذاری معادله (۲۴) در معادلات (۲۰) و (۲۱) می‌توان u^2 را به دست آورد. سپس با جای‌گذاری u^2 و معادله (۲) در معادله (۱۸) می‌توان عبارت زیر را برای ε_2 به دست آورد:

$$\varepsilon_2 = \frac{\int_0^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}}\frac{\partial^3 w\left[\overset{0}{u}(\varepsilon_{cr})\right]}{\partial u_{i,j}\partial u_{k,l}\partial u_{m,n}}\overset{1}{u}_{m,n}\overset{1}{u}_{k,l}\overset{2}{u}_{i,j}dX_1dX_2}{\int_0^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}}\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 w\left[\overset{0}{u}(\varepsilon)\right]}{\partial u_{i,j}\partial u_{k,l}}\right)|\varepsilon-\varepsilon_{cr}\quad\overset{1}{u}_{k,l}\overset{2}{u}_{i,j}dX_1dX_2} + \frac{\frac{1}{6}\int_0^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}}\frac{\partial^4 w\left[\overset{0}{u}(\varepsilon_{cr})\right]}{\partial u_{i,j}\partial u_{k,l}\partial u_{m,n}\partial u_{p,q}}\overset{1}{u}_{p,q}\overset{1}{u}_{m,n}\overset{1}{u}_{k,l}\overset{2}{u}_{i,j}dX_1dX_2}{\int_0^{\frac{L}{2}}\int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}}\frac{d}{d\varepsilon}\left(\frac{\partial^2 w\left[\overset{0}{u}(\varepsilon)\right]}{\partial u_{i,j}\partial u_{k,l}}\right)|\varepsilon-\varepsilon_{cr}\quad\overset{1}{u}_{k,l}\overset{2}{u}_{i,j}dX_1dX_2} \qquad (۲۵)$$

با داشتن یک کرنش فشاری مشخص ε می‌توان میدان جابه‌جایی u روی مسیر تعادل کمانش ستون را با استفاده از معادلات (۱۴) و (۱۵) به دست آورد. نیروی اعمال شده F متناظر با ε را نیز می‌توان از معادله زیر به دست آورد:

$$F = -\int_{-\frac{W}{2}}^{\frac{W}{2}}\frac{\partial w}{\partial u_{1,1}}\Big|_{X_2 = L/2}\,dX_1 = F_{cr} + \xi^2 F_2 + 0(\xi^4), \qquad (۲۶)$$

که در آن F_{cr} نیروی بحرانی برای کمانش ستون است. با ادغام کردن معادلات (۱۵) و (۲۶) و حذف متغیر واسطه ξ^2 می‌توان رابطه بین نیرو F و کرنش ε را به صورت زیر نوشت:

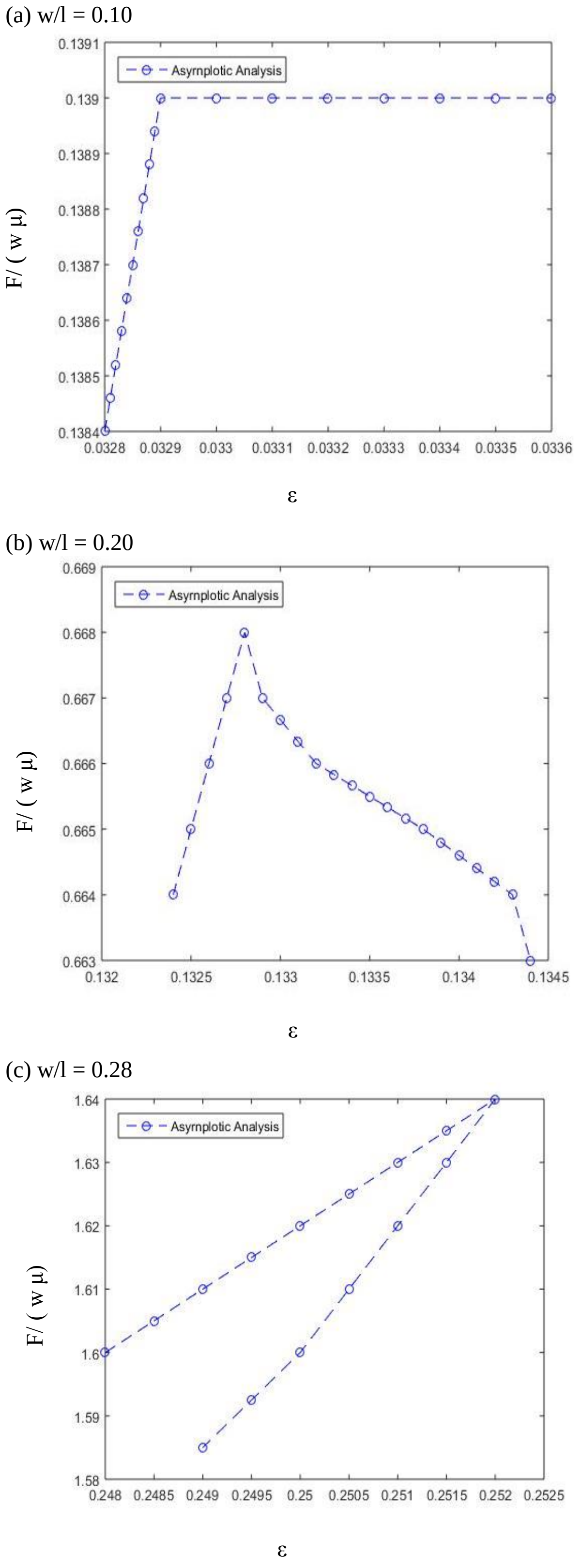
$$(F - F_{cr})\,/\,F_{cr} = S(\varepsilon - \varepsilon_{cr}) + o[(\varepsilon - \varepsilon_{cr})^2] \qquad (۲۷)$$

که در آن S شیب پس کمانش در نزدیکی نقطه کمانش است و از معادله زیر به دست می‌آید.

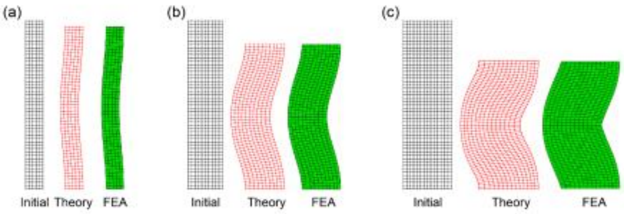
$$S = \frac{F_2}{\varepsilon_2 F_{cr}} \quad (۲۸)$$

برای تأیید این آنالیز پس کمانش، مسیرهای پس کمانش پیش‌بینی شده توسط معادله (۲۷) با آنالیز پس کمانش در شرایط *μ/K=0.005* (مواد شبه هوکی تقریبا تراکم‌ناپذیر) مقایسه گردید (شکل ۵). سه مقدار برای *w*/L انتخاب گردید که بیانگر سه حالت کمانش ستون هستند: *w*/L= 0.1 (کمانش پیوسته)، w/L= 0.2 (کمانش فروجهشی) و *w*/L=0.3 (کمانش ارتجاعی). در هر حالت، کرنش ε در ناحیه پس کمانش محدود به ۱ درصد بالاتر (کمانش پیوسته و فروجهشی) یا پایین‌تر (کمانش ارتجاعی) از کرنش بحرانی مربوطه ε_{cr} است به نحوی که معادله (۲۷) فقط با یک عبارت خطی از $(\varepsilon-\varepsilon_{cr})$ بتواند تخمین دقیقی از نیرو F ارائه کند. شیب پس کمانش S که در معادله (۲۷) برای مقادیر مختلف از *w*/L تعریف شده است را می‌توان با استفاده از معادله (۲۸) به دست آورد که برای *w*/L= 0.1 برابر با ۰/۰۲۹۷۴، برای *w*/L = 0.2 برابر با ۵/۷۸۸− و برای برای *w*/L = 0.28 برابر با ۱۲/۰۶ است. در نتیجه، مسیرهای پس کمانش پیش‌بینی شده توسط معادله (۲۷) (خطوط پررنگ آبی) و توسط آنالیز پس کمانش (دایره‌های قرمزرنگ) مطابقت خوبی با هم دارند (درصد خطای کمتر از ۰/۰۲) (شکل ۵). حتی اگر کرنش ε در ناحیه پس کمانش ۵ درصد نسبت به کرنش بحرانی ε_{cr} افزایش (کمانش پیوسته و فروجهشی) یا کاهش (کمانش ارتجاعی) یابد باز هم برآوردهای معادله (۲۷) برای مسیرهای پس کمانش دقیق هستند (درصد خطای کمتر از ۰/۳ درصد).

همچنین شکل‌های خمیده پیش‌بینی شده توسط آنالیز مجانبی و آنالیز پس کمانش در شرایطی مقایسه شد که کرنش ε در ناحیه پس کمانش به۱/۰۵ ε_{cr} (پیوسته و فروجهشی) یا۰/۹۵ ε_{cr} (ارتجاعی) می‌رسید (شکل ۶). شکل‌های خمیده پیش‌بینی شده توسط آنالیز فوق با آنالیز پس کمانش در هر سه حالت کمانش همخوانی دارند. توجه داشته باشید که هر گاه *w*/L بزرگ است (خصوصا برای کمانش ارتجاعی)، ستون مطابق نظریه تیموشنکو (Timoshenko) [30,31] دچار تغییر شکل برشی زیادی می‌شود. علاوه بر این، سطح مقطع‌هایی که در حالت اول صاف هستند پس از کمانش صاف باقی نمی‌مانند که با فرض تیموشنکو و سایر مدل‌های تیرچه استفاده شده در نظریه تیموشنکو در تضاد است [32].



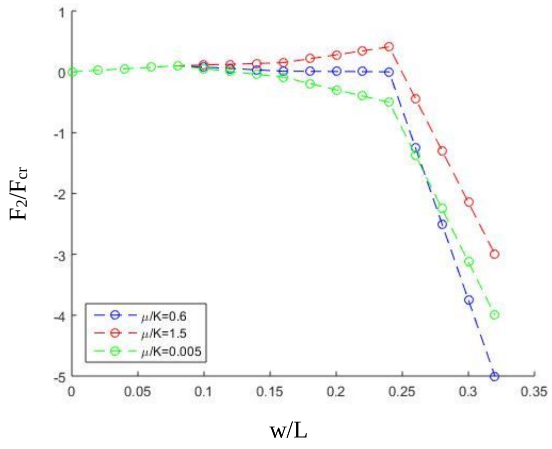
شکل ۵ مقایسه بین مسیرهای پس‌کمانش پیش‌بینی شده توسط آنالیز مجانبی (خطوط پررنگ) و آنالیز پس‌کمانش (نقطه‌ها) تحت شرایط μ/K = 0.005 برای سه حالت کمانش ستون: a) پیوسته (w/L = 0.10)، b) فروجهشی (w/L=0.20) و c) ارتجاعی (w/L = 0.28)



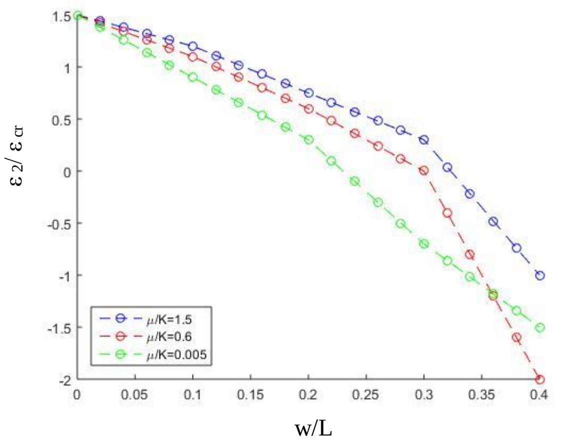
شکل ۶ مقایسه شکل‌های خمیده در آنالیز مجانبی و آنالیز پس‌کمانش تحت شرایط $\mu/K = 0.005$ برای سه حالت کمانش ستون: a) پیوسته $(w/L = 0.10)$، b) فروجهشی $(w/L = 0.20)$ و c) ارتجاعی $(w/L = 0.28)$. شکل اول بیانگر شکل اولیه ستون است در حالی که شکل‌های قرمز و سبز رنگ به ترتیب شکل خمیده پیش‌بینی شده توسط آنالیز مجانبی و آنالیز پس کمانش تحت کرنش ۵ درصد بالاتر (پیوسته و فروجهشی) یا پایین‌تر (ارتجاعی) از کرنش بحرانی هستند.

برای بررسی تغییرات شیب پس کمانش S با w/L، ابتدا دو پارامتر تعیین‌کننده S در معادله (۲۸) یعنی F_2 و ε_2 مورد بررسی قرار گرفت. مقادیر نرمال شده F_2/F_{cr} (شکل ۷a) و $\varepsilon_2/\varepsilon_{cr}$ (شکل ۷b) بر حسب تابعی از w/L و نسبت‌های مختلف μ/K رسم شد و به این نتیجه رسید که با افزایش w/L، هر دو پارامتر F_2 و ε_2 به صورت یکنواخت از یک مقدار مثبت کاهش می‌یابند و در یک w/L خاص به صفر می‌رسند. اگر $F_2 = 0$ و ε_2 یک مقدار مثبت باشد آن‌گاه علامت S از مثبت به منفی تغییر می‌کند ولی اگر $\varepsilon_2 = 0$ و F_2 یک مقدار منفی باشد آن‌گاه علامت S از بی‌نهایت منفی به بی‌نهایت مثبت تغییر می‌کند.

سپس S بر حسب تابعی از w/L و مقادیر مختلف از μ/K رسم شد (شکل ۷). برای تمامی مقادیر μ/K، زمانی که ستون بی‌نهایت لاغر است $(w/L << 1)$ شیب S با ۰/۵ شروع می‌شود که با پیش‌بینی‌های منحنی زنجیره‌ای اویلر مطابقت دارد. برای یک ماده تقریبا تراکم‌ناپذیر با $\mu/K=0.005$ ، هر چه ستون کلفت‌تر می‌شود (w/L زیاد می‌شود) شیب S کم می‌شود ولی مثبت باقی می‌ماند تا زمانی که $w/L = 0.103$ باشد چون در این نقطه، حالت کمانش از پیوسته به فروجهشی تغییر می‌کند. علامت S در $w/L = 0.238$ دوباره از منفی به مثبت تغییر می‌کند که نشان‌دهنده تغییر حالت کمانش از فروجهشی به ارتجاعی است. این $w/L = 0.238$ با نتایج عددی پیشین همخوانی دارد. هر گاه μ/K بزرگ‌تر است یعنی یک ماده تراکم‌پذیرتر داریم، علامت S دوبار تغییر می‌کند ولی w/L بحرانی برای تغییر حالت کمانش افزایش می‌یابد.



(الف)



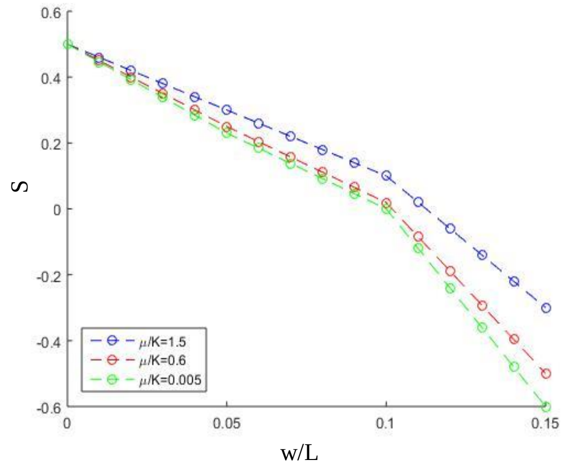
(ب)

شکل ۷ عبارت‌های درجه دوم نرمال شده در آنالیز مجانبی (a) نیروی فشاری F و (b) کرنش فشاری ε بر حسب تابعی از نسبت عرض به طول w/L و نسبت‌های مختلف از مدول برشی به حجمی μ/K. شکل داخلی (a) ناحیه‌ای را نشان می‌دهد که در آن علامت نیرو از مثبت به منفی تغییر می‌کند.

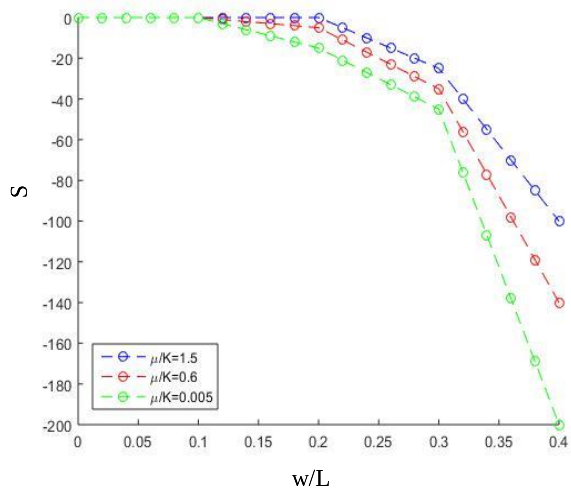
برای بررسی کامل تأثیر نسبت مدول برشی به حجمی μ/K روی تغییر حالت‌های کمانش، یک نمودار فازی (شکل ۹a) کشیده شد تا مرزهای بین سه حالت کمانش را در فضای w/L- μ/K نشان دهد. نتایج نشان داد که μ/K می‌تواند تبدیل حالت کمانش از فروجهشی به ارتجاعی را به عقب بیندازد تا در یک w/L بالاتر رخ دهد ولی نسبت μ/K تأثیر کمتری روی تغییر حالت کمانش از پیوسته به فروجهشی دارد. این اثر شدید μ/K روی مسیرهای پس‌کمانش با افزایش w/L را می‌توان به وضوح در شکل‌های (۹–b-d) دید که در آن‌ها شیب منحنی‌های $F/w\mu$- ε در ناحیه پس‌کمانش تحت μ/K مختلف در یک w/L پایین

تقریبا با هم برابرند (شکل ۹b) در حالی که این شیب‌ها در یک *w*/L بالا کاملا با هم فرق دارند (شکل‌های ۹-c-d).

(a)

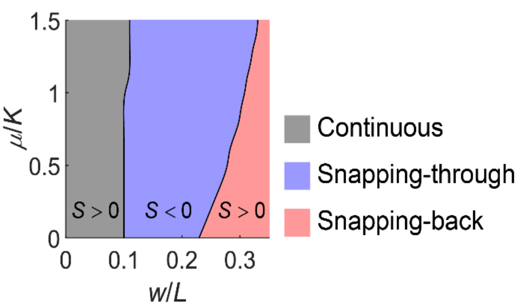


(b)

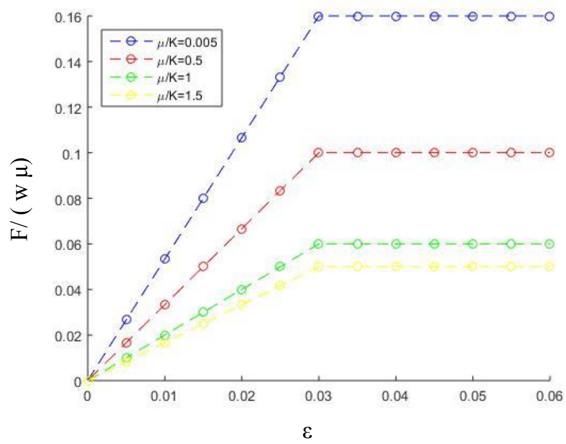


شکل ۸ شیب پس‌کمانش S بر حسب تابعی از نسبت عرض به طول w/L تحت نسبت‌های مختلف از مدول برشی به حجمی (μ/K.a) نمای بزرگ‌نمایی شده (b) در ناحیه‌ای علامت S از مثبت به منفی تغییر می‌کند.

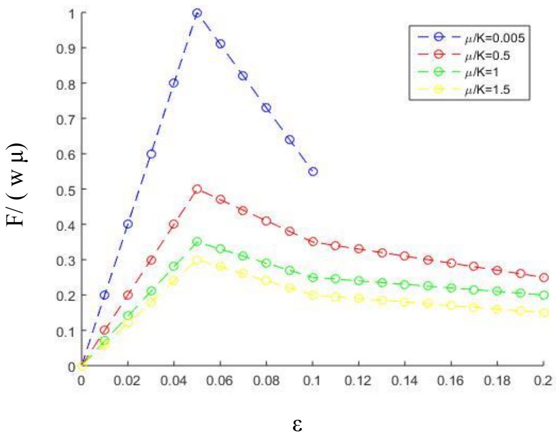
(a)



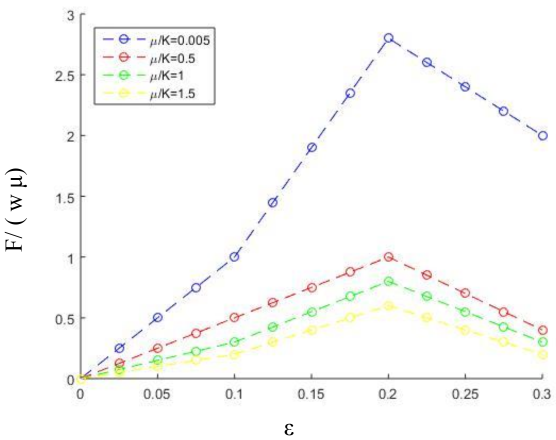
(b) w/L= 0.10



(c) w/l = 0.24



(d) w/L= 0.34



شکل ۹ تأثیر نسبت μ/K روی تغییر حالت‌های کمانش. (a) نمودار فازی حالت‌های کمانش بر حسب نسبت μ/K و w/L. خطوط سیاه رنگ بیانگر مرزهای بین حالت‌های کمانش هستند، (b-d) منحنی‌های نرمال شده نیرو ـ کرنش F/wμ-ε تحت μ/K مختلف که از آنالیز مجانبی در شرایط زیر به دست آمده‌اند: (b) *w*/L = 0.1 ، (c) *w*/L = 0.24 و (d) *w*/L = 0.34

نتیجه‌گیری

کمانش ستون‌های صاف تحت فشار محوری به طور گسترده برای چندین دهه مطالعه شده است. اگر چه رفتار کمانش ستون‌های لاغر به خوبی پیش‌بینی شده ولی رفتار پس‌کمانش ستون‌های عریض با نسبت‌های عرض به طول بالا (که در آن‌ها غیر خطی هندسی و ماده حیاتی می‌شود) بررسی نشده است. این مقاله، به صورت تحلیلی نشان می‌دهد که برای یک ستون هایپرالاستیک صاف، افزایش نسبت عرض به طول آن می‌تواند حالت کمانش آن را از کمانش پیوسته به فروجهشی و ارتجاعی تغییر دهد. بر همین اساس، علامت شیب اولیه پس کمانش نیز از مثبت به منفی تغییر می‌کند و در نهایت دوباره مثبت می‌شود. با استفاده از یک آنالیز مجانبی بر اساس مکانیک محیطهای پیوسته می‌توان شیب اولیه پس کمانش را بر حسب تابعی از نسبت عرض به طول ستون تعیین کرد و سپس نسبت‌های عرض به طول بحرانی برای تغییر حالت‌های کمانش مشخص شد که این نتایج به خوبی با نتایج شبیه‌سازی آنالیز پس کمانش مطابقت داشت. همچنین با افزایش نسبت مدول برشی به حجمی که بیانگر تراکم‌پذیری ماده است، تغییر حالت کمانش از کمانش فروجهشی به ارتجاعی به یک نسبت عرض به طول بالاتر می‌رود. یک نمودار فازی برای حالت‌های کمانش بر حسب نسبت عرض به طول و نسبت مدول برشی به حجمی نیز رسم شد. اگر چه آنالیز این مقاله بر اساس یک ماده شبه هوکی خاص است (معادله ۱-۴) ولی سایر مدل‌های شبه هوکی نیز نتایج مشابهی دارد. چارچوب پیشنهاد شده در این مقاله را می‌توان برای قوانین ساختاری دیگر نیز استفاده کرد تا تأثیر انواع غیرخطی‌های ماده روی رفتار پس کمانش آن مشخص شود. این پژوهش اطلاعات جدیدی درباره کمانش ستون فراهم می‌کند و یافته‌های این مقاله می‌تواند برای طراحی فرامواد مکانیکی که برای کارکرد خود به کمانش ستون متکی هستند استفاده شوند.

واژه‌نامه

مورفینگ	Morphing
منحنی زنجیره‌ای اویلر	Euler’s elastica
آنالیز دوشاخه‌شدگی	Bifurcation analysis
آنالیز پس‌کمانش مجانبی	Asymptotic post-buckling analysis
چروک‌شدگی	Creasing
کمانش پوسته	Shell buckling
معادله وردشی	Variational equation
تنش پیولا ـ کیرشهف	Piola-Kirchhoff

تقدیر و تشکر

مراجع

[1] K. Bertoldi, V. Vitelli, J. Christensen, M. Van Hecke, “Flexible mechanical metamaterials,” *Nature Reviews Materials*, vol. 2, no. 1, p. 17066, 2017. https://doi.org/10.1038/natrevmats.2017.66

[2] K. Bertoldi, P.M. Reis, S. Willshaw, T. Mullin, “Negative Poisson’s ratio behavior induced by an elastic instability,” *Advanced Materials*, pp. 361–366, 2010. https://doi.org/10.1002/adma.200901956

[3] B. Florijn, C. Coulais, M. van Hecke, “Programmable mechanical metamaterials,” *Physical review letters*, vol. 113, no. 17, p. 175503, 2014. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.113.175503

[4] J.W. Boley, W.M. van Rees, C. Lissandrello, M.N. Horenstein, R.L. Truby, A. Kotikian, J.A. Lewis, L. Mahadevan, “Shape-shifting structured lattices via multimaterial 4D printing,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 116, no. 42, pp. 20856–20862, 2019. https://doi.org/10.1073/pnas.1908806116

[5] C. Coulais, A. Sabbadini, F. Vink, M. van Hecke, “Multi-step self-guided pathways for shape-changing metamaterials,” *Nature*, vol. 561, no. 7724, pp. 512–515, 2018. https://doi.org/10.1038/s41586-018-0541-0

[6] L.A. Lubbers, M. van Hecke, C. Coulais, “A nonlinear beam model to describe the postbuckling of wide beams,”

Journal of the Mechanics and Physics of Solids, vol. 106, pp. 191–206, 2017. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.06.001

[7] S.P. Timoshenko, J.M. Gere, Theory of Elastic Stability, Courier Corporation, 2009.

[8] M.A. Biot, “Exact theory of buckling of a thick slab,” *Applied Scientific Research, Section A*, vol. 12, pp. 183–198, 1963. https://doi.org/10.1007/BF03184639

[9] R. Ogden, D. Roxburgh, “The effect of pre-stress on the vibration and stability of elastic plates,” *International Journal of Engineering Science*, vol. 31, pp. 1611–1639, 1993. https://doi.org/10.1016/0020-7225(93)90079-A

[10] W. Koiter, Elastic Stability of Solids and Structures, Cambridge University Press, Cambridge, 2009. https://doi.org/10.1017/CBO9780511546174

[11] Y. Cao, J.W. Hutchinson, “From wrinkles to creases in elastomers: the instability and imperfection-sensitivity of wrinkling,” *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 468, no. 2137, pp. 94–115, 2012. https://doi.org/10.1098/rspa.2011.0384

[12] H.-H. Dai, Y. Wang, F.-F. Wang, “Primary and secondary bifurcations of a compressible hyperelastic layer: Asymptotic model equations and solutions,” *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 52, pp. 58–72, 2013. https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2013.01.019

[13] H.-H. Dai, F.-F. Wang, J. Wang, J. Xu, “Pitchfork and octopus bifurcations in a hyperelastic tube subjected to compression: Analytical post-bifurcation solutions and imperfection sensitivity,” *Mathematics and Mechanics of Solids*, vol. 20, no. 1, pp. 25–52, 2015. https://doi.org/10.1177/1081286514543597

[14] A.A. Almet, H.M. Byrne, P.K. Maini, D.E. Moulton, “Post-buckling behaviour of a growing elastic rod,” *Journal of Mathematical Biology*, vol. 78, pp. 777–814, 2019. https://doi.org/10.1007/s00285-018-1292-0

[15] N. Triantafyllidis, W. Scherzinger, H.-J. Huang, “Post-bifurcation equilibria in the plane strain test of a hyperelastic rectangular block,” *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, no. 11-12, pp. 3700–3719, 2007. https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2006.10.012

[16] Y. Taghipour Lahijani, A. Mashayekhi, B. Akhoundi, “Modeling Large Deflection of the Chromium Nanobeams using the Design of Experiments Method,” *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, vol. 35, no. 4, pp. 107–120, 2023. https://doi.org/10.22067/jacsm.2023.83862.1198

[17] M. Seidi, Z. Seydi, “Prediction and Optimization of Hardness Value of Mold Steel in Wirecut Process based on Fuzzy Inference System,” *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, vol. 35, no. 1, pp. 53–70, 2023. https://doi.org/10.22067/jacsm.2022.79508.1145

[18] M. Mohahmmadi, M. Mahmoodi, “The Effect of Material Degradation on the Bending Laminated Plates,” *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, vol. 34, no. 2, pp. 1–14, 2022. https://doi.org/10.22067/jacsm.2022.76213.1113

[19] L.A. Lubbers, M. van Hecke, C. Coulais, “A nonlinear beam model to describe the postbuckling of wide beams,” *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, vol. 106, pp. 191–206, 2017. https://doi.org/10.1016/j.jmps.2017.06.001

[20] E. Hohlfeld, L. Mahadevan, "Unfolding the sulcus," *Physical Review Letters*, vol. 106, no. 10, p. 105702, 2011. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.105702

[21] W. Hong, X. Zhao, Z. Suo, "Formation of creases on the surfaces of elastomers and gels," *Applied Physics Letters*, vol. 95, no. 11, p. 111901, 2009. https://doi.org/10.1063/1.3211917

[22] Z.P. Bažant, L. Cedolin, Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories, World Scientific Pub, Hackensack, NJ; London, 2010.

[23] D. Roxburgh, R. Ogden, "Stability and vibration of pre-stressed compressible elastic plates," *International Journal of Engineering Science*, vol. 32, no. 3, pp. 427–454, 1994. https://doi.org/10.1016/0020-7225(94)90133-3

[24] J. Kadkhodapour, A. Pourkamali Anaraki, "Investigating the Mechanical Properties of Polymer Composite Materials made by 3D Printing Method," *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, vol. 35, no. 4, pp. 77–89, 2023. https://doi.org/10.22067/jacsm.2023.81972.1182

[25] A. Zahedi Dizajyekan, "Investigating Fracture Mechanism in Single Point Incremental Forming o AA5052 Aluminum Alloy using Bao-Wierzbicki Damage Model," *Journal of Applied and Computational Sciences in Mechanics*, vol. 35, no. 4, pp. 63–76, 2023. https://doi.org/10.22067/jacsm.2023.81834.1180

[26] W. Koiter, Elastic Stability of Solids and Structures, Cambridge University Press, Cambridge, 2009. https://doi.org/10.1017/CBO9780511546174

[27] O. Mesa, S. Norman, "Non-Linear Matters: Auxetic Surfaces," 2017.

[28] W. Hong, X. Zhao, Z. Suo, "Formation of creases on the surfaces of elastomers and gels," *Applied Physics Letters*, vol. 95, no. 11, p. 111901, 2009. https://doi.org/10.1063/1.3211917

[29] W. Hong, F. Gao, "Crease instability on the surface of a solid," *Mechanics of Self-Assembly, Springer*, 2013, pp. 111–130. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4562-3_6

[30] A. Humer, "Exact solutions for the buckling and postbuckling of shear-deformable beams," *Acta Mechanica*, vol. 224, pp. 1493–1525, 2013. https://doi.org/10.1007/s00707-013-0818-1

[31] E. Reissner, "On one-dimensional large-displacement finite-strain beam theory," *Studies in Applied Mathematics*, vol. 52, no. 2, pp. 87–95, 1973. https://doi.org/10.1002/sapm197352287

[32] S.P. Timoshenko, J.M. Gere, Theory of Elastic Stability, Courier Corporation, 2009.